

201 228
203 241
209 264

12' 30"

Zuily-Queffelec
p. 518

Theorème de Weierstrass par Bernstein / Proba

Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f): x \in [0,1] \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$

Thé: Si $f \in C^0([0,1])$, alors $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$

Soit $x \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que, $k \in [0,n] \mapsto \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ est la probabilité d'une loi binomiale de paramètre (n, x) . On pose donc S_n variable aléatoire de loi $B(n, x)$ définie sur un espace probabilisé.

Alors $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) P(S_n = k) = E[f(\frac{S_n}{n})]$ par théorème de transfert. Donc

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = |E[f(\frac{S_n}{n}) - f(x)]| \leq E[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] \quad \text{Soit } \varepsilon > 0$$

Puisque f est continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue par Heine. On a un $\delta > 0$ tel que $|u-v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$. On a

$$E[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] = E[\mathbb{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| < \delta} |f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] + E[\mathbb{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta} |f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|]$$

Donc $E[\mathbb{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| < \delta} |f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] \leq E[\varepsilon] = \varepsilon$. Par le théorème des bornes atteintes

$$E[\mathbb{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta} |f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] \leq 2\|f\|_\infty P(|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta)$$

Par Tchebychev, $P(|\frac{S_n}{n} - x| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} \text{Var}(\frac{S_n}{n})$. De plus, $S_n \sim B(n, x)$ donc $\text{Var}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n} x(1-x) \leq \frac{1}{n}$. Finalement, on a

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{n} x(1-x) \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n}$$

En passant au sup, on a $\|B_n f - f\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n}$. On passe à la

lim sup sur n , $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|B_n f - f\|_\infty \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$.

Thé: Toutes fonctions $f \in C^0([a,b])$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

On pose $\varphi: [0,1] \rightarrow [a,b]$ et $g = f \circ \varphi \in C^0([0,1])$. Par le théorème on a $B_n(g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ uniformément. Puisque $\varphi^{-1}: s \in [a,b] \mapsto \frac{s-a}{b-a} \in [0,1]$

est continue et affine, $P_n := B_n(g) \circ \varphi^{-1}$ fonction polynomiale et $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ unif. o

Application: Soit $f \in C^0([0,1])$, $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 f(x) x^n dx = 0$. Alors $f = 0$ sur $[0,1]$.

Par linéarité, $\forall p \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 p(x) f(x) dx = 0$. Par Weierstrass, $\exists (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]^n$ $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$. Par

TBA, f bornée donc $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ dans L^1 . Alors $\int_0^1 P_n(x) f(x) dx = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f(x)^2 dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$. $\square$

Remarque: Si $f \in C^0(\mathbb{R})$, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ unif où $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]^n$, alors $f \in \mathbb{R}[X]$.

On a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unif, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \|P_n - P_m\|_\infty < \varepsilon$, donc $P_n - P_m$ bornée sur $\mathbb{R} \forall n \geq N$. Alors

$P_n - P_m$ est et $\exists (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, $P_n = P_m + c_n$. Puisque $P_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0)$, $c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c = f(0) - P_m(0)$. Alors $\forall n \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P_m + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = P_m + c \in \mathbb{R}[X]$. $\square$